**به نام او**

**تمرینات سری چهارم – فصل چهارم و پنجم**

پاسخ تمرین‌ها را به صورت خوانا و تمیز در قالب ( به عنوان مثال، ) نوشته و تا قبل از ددلاین در سامانه کورسز دانشگاه آپلود نمایید. در صورت وجود هرگونه ابهام، با ایمیل در ارتباط باشید.

1. درستی و یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید و برای پاسخ خود دلیل مناسب بیاورید.

الف) یک مجموعه‌ی مستقل خطی در زیرفضای ، یک پایه برای فضای است.

ب) اگر مجموعه‌ی متناهی و غیرصفر فضای برداری را کند، آنگاه بعضی از زیرمجموعه‌های پایه‌ای برای هستند.

پ) پایه برای یک فضای برداری، بزرگترین مجموعه‌ی مستقل خطی ممکن است که آن فضا را می‌کند.

ج) اگر ماتریس فرم کاهش‌یافته ماتریس باشد، آنگاه ستون‌های محوری ماتریس پایه‌ای برای تشکیل می‌دهند.

2. فرض کنید مجموعه‌ی یک مجموعه‌ی وابسته خطی است که فضای برداری را می‌کند. نشان دهید به ازای هر ، می‌توان را با بیش از یک ترکیب خطی از تا نوشت.

3. ماتریس تبدیل از پایه به پایه (در صفحه ) به صورت می‌باشد. همچنین اگر بدانیم بردار مختصات‌های متناسب با پایه برای بردار های و برابر و می‌باشد، بردارهای پایه‌های و را بیابید.

4. فرض کنید ، ، و . واضح است که و پایه‌هایی برای می‌باشند.

الف ) و را محاسبه کنید.

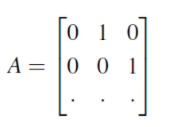
ب ) و را بیابید.

5. ماتریس تبدیل پایه از پایه به

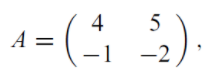
را بیابید . از نتیجه فوق استفاده کرده و ماتریس تبدیل پایه از به را بیابید . فرض کنید تابع چندجمله‌ای درجه دو دارای مختصات متناسب با پایه می‌باشد. بردار مختصات آن را متناسب با پایه محاسبه کنید.

6. الف) مقادیر ویژه ماتریس را بدست آورده و سپس بردارهای ویژه آن را مشخص کنید.

ب) ماتریس را قطری‌سازی کرده (ماتریس های و را در بدست آورید) و سپس صحت جواب خود را بدون محاسبه بررسی کنید.

7. الف) ردیف سوم از [𝑐𝑜𝑚𝑝𝑎𝑛𝑜𝑛 𝑚𝑎𝑡𝑟𝑖𝑥](https://en.wikipedia.org/wiki/Companion_matrix) زیر را بدست آورید به طوریکه معادله مشخصه آن به صورت باشد.

ب) فرض کنیم یک ماتریس و معکوس‌پذیر باشد. ثابت کنید اگر مقدار ویژه غیرصفر ماتریس باشد، آن گاه مقدار ویژه ماتریس است.

8. ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

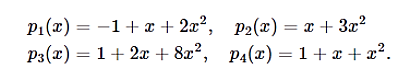
ماتریس را به ازای هر صحیح و مثبت بدست آورده و نتیجه بگیرید که عبارت

به ازای بر ۴ بخش‌پذیر است.

9. الف) مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس‌های زیر را بدست آورده و سپس نشان دهید که مجموع مقادیر ویژه برابر (اثر) و حاصل‌ضرب مقادیر ویژه برابر دترمینان است.

ب) ماتریس را قطری‌سازی کرده به طوری که و ماتریس مختلط معکوس‌پذیر و ماتریس قطری باشد.

10. **(امتیازی)** فرض کنید فضای برداری تمامی چندجمله‌ای‌های با ضرایب حقیقی و درجه ۲ یا کمتر باشد. و فرض کنید به طوری که:



الف) یک پایه برای بین بردارهای پیدا کنید (و توضیح دهید چرا یک پایه است) .

ب) فرض کنید پایه‌ای باشد که در قسمت الف پیدا کردید. برای هر بردار که در نیست بردار را با توجه () به پایه پیدا کنید.

موفق باشید

تیم تدریس‌یاری جبرخطی

پاییز 99